Feuille d'exercises 1 (20 septembre)

Exercice obligatoire. Étant donné un interval fermé $I \subset \mathbb{R}$ (ce qui comprends le cas $I = \mathbb{R}$), considérons l'espace vectoriel

$$C^1(I) \coloneqq \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue, derivable et } f' \text{ derivable}\}.$$

1. Montrer que
$$\|f\| \coloneqq |f(0)| + \int_I |f'(t)|\, dt,$$
définit une norme sur $C^1(I)$ quand $I = [a, b]$, $-\infty < a < 0 < b < +\infty$. Est-ce que le même résultat est vrai pour $I = \mathbb{R}$?

2. Définit-on une norme sur $C^1(\mathbb{R})$ en posant
$$\|f\| \coloneqq |f(0)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \,?$$

Exercice 1. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que tout boule ouverte est ouverte et que tout boule fermée est fermée.

Exercice 2. Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux evn. On munit $E_1 \times E_2$ de la norme $\|(x_1, x_2)\| \coloneqq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$ si $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme.
2. Soient $A \subset E_1 \times E_2$ ouvert et $(x_1, x_2) \in A$. Montrer qu'il existent $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$ ouverts tels que $A_1 \times A_2 \subset A$.
3. Soient $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$ ouverts. Montrer que $A_1 \times A_2$ est un ouvert de $E_1 \times E_2$.

Exercice 3. Montrer que sur $\mathbb{R}^n$ on a

$$\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_p, \quad \forall p \in [1, \infty).$$

Dessiner les boules détérminées par ces normes pour $n = 2$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'indéterminée x. C'est-à-dire, $P \in \mathbb{R}[x]$ a la forme $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Montrer que les fonctions suivantes sont des normes :

$$\|P\|_1 \coloneqq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \quad \|P\|_2 \coloneqq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2}, \quad \|P\|_\infty \coloneqq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Exercice ($\star$) 5. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}[x]$ definis dans l'exercice 4 ne sont pas équivalentes.
Suggestion: Considerer les quotients $\|\cdot\|_1/\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_2/\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont ouvert, fermés ou ni l'un, ni l'autre:

1. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:
$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{m + \tfrac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$
2. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$:
$$\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \{(x, y) \mid xy = 1\}, \quad \{(x, y) \mid xy < 1\}.$$
3. Dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$:
$$\{f \in C([0,1]) \mid f \text{ est constante}\}, \quad \{f \in C([0,1]) \mid f(1/2) = 1\}.$$

Exercice ($\star$) 7. Considérons l'evn $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Montrer que $A \subset \mathbb{R}$ est ouvert si et seulement si il est union d'une quantité dénombrable d'intervals disjoints. C'est-à-dire, il existe un ensemble d'indexes $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ et des intervals ouverts $\{I_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ tels que $I_i \cap I_j = \varnothing$ si $i \neq j$ et $A = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} I_i$.