Exercises pour les vacances (20 octobre)

Exercice obligatoire 1. Soit

$$\mathrm{Lip}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est lipschitzienne}\}.$$

Montrer que :

1. $\mathrm{Lip}([0,1])$ est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
2. La fonction suivante est une norme sur $\mathrm{Lip}([0,1])$:
$$\|f\|_{\mathrm{Lip}([0,1])} := |f(0)| + L(f), \quad \text{où} \quad L(f) := \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$
3. On a
$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}([0,1])}, \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}([0,1]).$$

On veut maintenant prouver que $\mathrm{Lip}([0,1])$ est un espace de Banach (c.-à-d. que $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}([0,1])})$ est complet). À cet effet, montrer que:

1. Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}([0,1])})$, alors il existe $f_\infty \in C([0,1])$ tel que $f_n \to f_\infty$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. La fonction f_∞ est lipschitzienne (c.-à-d. $f_\infty \in \mathrm{Lip}([0,1])$). À cet effet on pourra utiliser le fait que toute suite de Cauchy est borné.
3. En utilisant le fait que $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}([0,1])})$ et que la convergence par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ implique la convergence ponctuelle, prouver que $f_n \to f_\infty$ par rapport à $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}([0,1])}$.

Exercice obligatoire 2. Soit (E,d) un espace métrique, $C \subset E$ et $a \in E$. Montrer qu'il existe $x_0 \in C$ tel que

$$d(a,x_0) = \inf_{y\in C} d(a,y),$$

dans le deux cas suivants :

1. C est compact;
2. tout boule fermée $\bar{B}(a,R)$, $R > 0$, est compacte et C est fermé non vide.

Donner un contre example lorsque C non fermé (considerer, par example, $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$).