Feuille d'exercises 4 (17 octobre)

Exercice 1. Considerons l'application $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ defini par

$$Tf(x) := \int_0^x t^2 f(t)\,dt + \frac{1}{2}, \qquad \forall f \in C([0,1]).$$

1. Montrer que T est une application contractante par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ et en deduire qu'elle admet un point fixe $f_0 \in C([0,1])$;
2. Montrer que $\|f_0\| \leq 1$.

Exercice 2. Définir deux applications $T, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que

$$|T(x) - T(y)| < |x-y|, \qquad |R(x) - R(y)| \geq 2|x-y|,$$

mais avec aucun point fixe en $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi \in C([0,1])$.

1. Montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que
$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy + \varphi(x).$$
2. $(\star)$ Montrer que pour tout $\lambda > 0$ il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que
$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x,y) f(y)\,dy + \varphi(x).$$

Exercice 4. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, C une partie compacte de E et $f : C \to E$ t.q. $f(C) \subset C$. Montrer que :

1. si f est une isométrie (c.-à-d. $\|f(x) - f(y)\| = \|x-y\|$ pour tous $x, y \in C$) elle est bijective.
2. si $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x-y\|$ pour tous $x, y \in C$, alors elle est une isométrie bijective.

Indication: considérer les images itérées d'un point.

Exercice 5. Étant donné l'interval $[0,1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des fonctions $f \in C^0([0,1])$ qui sont affines (c.-à-d. avec dérivée constante) sur tous les intervals de type $]i/n, (i+1)/n[$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et tels que $\|f\|_\infty \leq 100$. Montrer que :

1. $\mathcal{F}_n$ est une partie fermée et bornée de $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.
2. $\mathcal{F}_n$ est une partie compacte de $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 6. Soient

$$l^2 = \left\{ x = (a_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\},$$
$$l^\infty = \left\{ x = (a_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n |a_n| < \infty \right\},$$

munis des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, respectivement.

1. Montrer que $l^2 \subset l^\infty$.
2. Posons $S = \{x \in l^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$. Trouver une suite $(x_n)_n \subset S$ tel que $x_n \to 0$ dans l^∞.
3. En déduire que S n'est pas compacte.