Feuille d'exercises 2 (26 septembre)

Exercice obligatoire. Considérons $\mathbb{R}^2$ équipé avec la norme euclidienne.

1. Déterminer l'adhérence, l'intérieur, la frontière et les points isolés de l'ensemble $D = A \cup B \cup C$, où

$$A \coloneqq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = n(x-1),\, 0 \le x \le 1\right\},$$
$$B \coloneqq \{(x,y) \mid y > x-1\}, \quad C \coloneqq \left\{\left(0, -\frac{n}{2}\right) \mid n = 1, 2, \ldots\right\}.$$

2. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle (plein et qui comprend les côtés) de vertexes $(0,0)$, $(0,-2)$ et $(1,0)$. Déterminer si l'ensemble $D \cap T$ est fermé.

Exercice 1. Considérons $\mathbb{R}^2$ équipé avec la norme euclidienne. Déterminer l'adhérence, l'intérieur, la frontière et les points isolés de l'ensemble $D = A \cup B$, où

$$A \coloneqq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-n)^2 + y^2 \le \frac{1}{2^n}\right\},$$
$$B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n, \quad B_n \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{n}x - 1,\, 0 \le x \le n\right\},$$

Exercice 2. On considère $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Étant donné $I \subset [0,1]$ non vide, montrer que $\mathrm{Fr}(X) = X$ où

$$X = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I\}.$$

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1. L'intersection de parties denses de E est-elle dense ?
2. Montrer que l'intersection de deux ouverts et dense est dense.
3. ($\star$) Que dire de l'intersection quelconque d'ouverts denses ?

Exercice 4. Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux evns et $f, g : E_1 \to E_2$ deux fonctions continues. Supposons qu'il existe une partie dense $A \subset E_1$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que, alors, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E_1$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par rapport à la norme $|\cdot|$ et telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On note $a = f(1)$. Calculer f sur $\mathbb{Q}$ et puis la déterminer sur $\mathbb{R}$. (On utilisera l'exercice 4)

Exercice 6. Considérons $C([0,1])$. Les fonctions suivantes sont-elles continue par rapport à $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$?

$$T_1 : \begin{array}{ccc} C([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}, \qquad T_2 : \begin{array}{ccc} C([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x)\,dx \end{array}$$

Exercice 7. Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux evns, et considerons $E = E_1 \times E_2$ avec la norme $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$. Montrer que les fonctions suivantes sont continues:

1. La norme $\|\cdot\|$;
2. Les projections $\pi_i : E \to E_i$, $\pi_i(x_1, x_2) \coloneqq x_i$, $i = 1, 2$;
3. Les inclusions $\iota_i : E_i \to E$, $i = 1, 2$, $\iota_1(x) \coloneqq (x, 0)$ et $\iota_2(x) \coloneqq (0, x)$.