Feuille d'exercices 30 novembre

Exercice obligatoire (à rendre vendredi 4/12) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On considère l'ensemble B des fonctions bornées $f : A \to \mathbb{R}$, c.-à-d. :

$$B = \{f : A \to \mathbb{R} \mid \exists M > 0 \text{ t. q. } |f(x)| \leq M, \forall x \in A\}.$$

On le munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

1. Pourquoi est elle une norme sur B?
2. Ecrire que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(B, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Justifier qu'il existe une fonction f telle que pour tout $a \in A$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Pourquoi est-elle bornée sur A?
4. Montrer que $(B, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles continues ?

$$\begin{aligned} T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : (C([0,1]), \|\cdot\|_1) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : (C([0,1]), \|\cdot\|_1) &\to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : (C([0,1]), \|\cdot\|_1) &\to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \\ f &\mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : (C([0,1]), \|\cdot\|_1) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt \end{aligned}$$

Exercice 2 Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi \in C([0,1])$.

1. Montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que
$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy + \varphi(x).$$
2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que
$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x,y) f(y)\,dy + \varphi(x).$$

Exercice 3 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, C une partie compacte de E et $f : C \to E$ t.q. $f(C) \subset C$. Montrer que :

1. si f est une isométrie (c.-à-d. $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in C$) elle est bijective.
2. si $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in C$, alors elle est une isométrie bijective.

Indication: considérer les images itérées d'un point.

Exercice 4 Étant donné l'interval $[0, 1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des fonctions $f \in C^0([0, 1])$ qui sont affines (c.-à-d. avec dérivée constante) sur tous les intervals de type $]i/n, (i + 1)/n[$ pour $i = 0, \ldots, n - 1$ et tels que $\|f\|_\infty \leq 100$. Montrer que :

1. $\mathcal{F}_n$ est une partie fermée et bornée de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.
2. $\mathcal{F}_n$ est une partie compacte de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 5 Soient

$$l^2 = \left\{ x = (a_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\},$$
$$l^\infty = \left\{ x = (a_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n |a_n| < \infty \right\},$$

munis des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, respectivement.

1. Montrer que $l^2 \subset l^\infty$.
2. Posons $S = \{x \in l^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$. Trouver une suite $(x_n)_n \subset S$ tel que $x_n \to 0$ dans l^∞.
3. En déduire que S n'est pas compacte.