Feuille d'exercices 20 novembre

Exercice obligatoire (à rendre mercredi 25/11)

1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(E, \|\cdot\|_F)$ deux evn et $f, g : E \to F$ deux fonctions continues. Supposons qu'il existe une partie dense $A \subset E$ t.q. $f(x) = g(x)$ pour tous $x \in A$. Montrer que, alors, $f(x) = g(x)$ pour tous $x \in E$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On note $a = f(1)$. Calculer f sur $\mathbb{Q}$ et puis la déterminer sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 Montrer directement que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue et qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty)$.

Exercice 2 Soit $I \subset [0, 1]$ non vide. On considère $X \subset C([0, 1])$ des fonctions nulles sur I. Montrer que $\partial X = X$.

Exercice 3 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn.

- Si E est un espace de Banach et $(\bar{B}_n)_n$ est une suite de boules fermées $\bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ tels que $\bar{B}_{n+1} \subset \bar{B}_n$ pour tous n et $\lim_n r_n = 0$, montrer que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \neq \varnothing.$$
- $(\star)$ Montrer que en fait ça c'est une condition necessaire pour la complétude de E.

Exercice 4 Considérons l'application $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ définis par

$$T[f](x) = \int_0^x t^2 f(t)\, dt + \frac{1}{2} \qquad \forall f \in C([0, 1]).$$

- Montrer que T est une application contractante par rapport à la norme $\|f\|_\infty$ et en déduire qu'elle admet un point fixe $f_0 \in C([0, 1])$.
- Montrer que $\|f_0\|_\infty \leq 1$.

Exercice 4 Définir deux applications $T, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que

$$|T(x) - T(y)| < |x - y| \quad \text{et} \quad |R(x) - R(y)| \geq 2|x - y|$$

mais avec aucun point fixe en $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (à faire après lundi) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1. Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.
2. On se propose de démontrer que si F est un sev fermé de E et G un sev de dimension finie de E, alors $F + G$ est fermé dans E:
   - Justifier l'existence d'un sev G' de E tel que $F + G = F \oplus G'$;
   - On considère une suite $(x_n)_n \subset F + G$ qui converge vers $x_0 \in E$.
     - Montrer que l'on peut écrire $x_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in F$ et $b_n \in G'$.
     - Montrer que si $(b_n)_n$ est bornée, $x_0 \in F \oplus G'$.
     - Que faire lorsque $(b_n)_n$ n'est pas bornée?
   - Conclure.