Feuille d'exercices 6 novembre

Exercice 1 Étant donné un interval fermé $I \subset \mathbb{R}$ (ce qui comprends le cas $I = \mathbb{R}$), considérons l'espace $C^1(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue, derivable et } f' \text{ derivable}\}$.

1. Démontrer que $C^1(I)$ est un espace vectoriel.
2. Démontrer que
$$\|f\| = |f(0)| + \int_I |f'(t)|\, dt$$
définit une norme sur $C^1(I)$ quand $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Est-ce que le même résultat est vrai pour $I = \mathbb{R}$?
3. Définit-on une norme sur $C^1(\mathbb{R})$ en posant
$$\|f\| = |f(a)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|?$$

Exercice 2 Démontrer que, sur $\mathbb{R}^n$, on a
$$\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_p \qquad \forall 1 \le p < \infty.$$
Dessiner les boules déterminée par ces normes.

Exercice 3 Démontrer que, dans un evn $(E, \|\cdot\|)$, le boules ouvertes sont des parties ouvertes de E. Démontrer que les boules fermées sont des parties fermées de E.

Exercice 4 Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontiere des ensembles suivants. En plus, si c'est le cas, dire s'ils sont fermés ou ouverts.

1. Dans $\mathbb{R}$:
   - $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$
   - $A = \{m + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$
   - $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$
   - $C = \{0\} \cup B$
2. Dans $\mathbb{R}^2$:
   - l'hyperbole $xy = 1$
   - son épigraphe $xy \le 1$
3. Dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 réelles muni de la norme $\|M\|_\infty = \max |M_{i,j}|$ montrer que :
   - l'ensemble des matrices singulières est fermé,
   - l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert.
4. Dans l'espace $C([0, 1])$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$:
   - L'ensemble des fonctions constantes $X = \{f \in C([0, 1]) \mid f(x) = f(0), \forall x \in [0, 1]\}$,
   - $Y = \{f \in C([0, 1]) \mid f(1/2) = 1\}$.

Exercice 5 Considérons un evn $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient une boule ouverte de E, alors $F = E$.
2. Montrer que, si $B(x, r) = B(y, \rho)$ pour $x, y \in E$ et $r, \rho > 0$ alors $x = y$ et $r = \rho$.

Exercice 6 Étant donné un evn $(E, \|\cdot\|)$, dénotons avec $\overline{A}$ l'adhérence d'une partie $A \subset E$.

1. Montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
2. Montrer que $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.