Corrigée feuille d'exercises 2 (26 septembre)

Exercice 1. *Considérons $\mathbb{R}^2$ équipé avec la norme euclidienne. Déterminer l'adhérence, l'intérieur, la frontière et les points isolés de l'ensemble $D = A \cup B$, où*

$$A \coloneqq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n \coloneqq \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-n)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2^n} \right\},$$

$$B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n, \quad B_n \coloneqq \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{n}x - 1,\ 0 \leq x \leq n \right\},$$

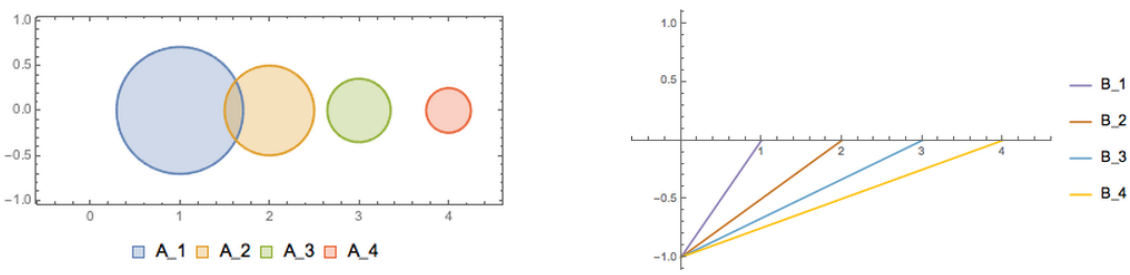
Solution. La première chose à faire est dessiner les ensembles en question. On voit immédiatement que chaque A_n est un cercle fermé de rayon $\sqrt{2^{-n}}$ et centre $(n,0)$. En particulier, les A_n pour n différents sont disjoints (voire figure 1a). D'autre part, chaque B_n est un segment qui va de $(0,-1)$ à $(n,0)$, le centre de A_n (voire figure 1b). En figure 2 on voit l'ensemble D.

En regardant les dessins c'est claire que

$$\mathring{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-n)^2 + y^2 < \frac{1}{2^n} \right\}. \tag{1}$$

On montre d'abord que $\mathring{A}_n$ est bien le cercle privé du bord $C_n = \{(x-n)^2 + y^2 < \frac{1}{2^n}\}$. Vu que $\mathring{A}_n \subset A_n$ et que C_n est bien ouvert[1] on doit juste montrer que si $(x,y) \in A_n$

[1] Pour verifier ça il suffit d'observer que $C_n = B((n,0), 2^{-n})$.



(a) Ensemble A

(b) Ensemble B

Figure 1

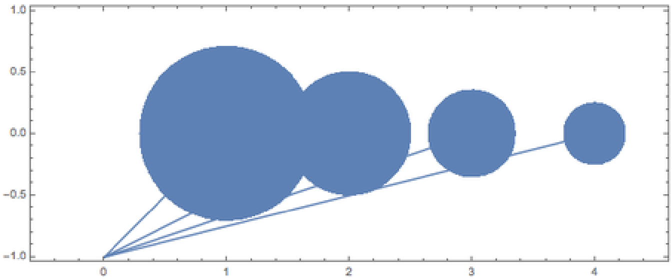


Figure 2: Ensemble D

est tel que $(x-n)^2+y^2 = 2^{-n}$, alors $(x,y) \neq \mathring{A}_n$. Ça suit immédiatement du fait que, pour tout $r>0$, on a que $P(t) = ((1-t)n + tx, ty) \in B((x,y),r)$ si $t \in]-r,r[$, mais $P(t) \notin A_n$ pour tout $t \in]0,r[$.

Vu que, clairement, $\mathring{A}_n \subset \mathring{D}$ pour tout n, pour prouver (1) il nous reste à montrer que

$$P \in D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{A}_n \implies P \notin \mathring{D}. \tag{2}$$

La même preuve qu'on vient de faire pour montrer $\mathring{A}_n = C_n$ montre que (2) est vraie si $P \in A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{A}_n$. Soit donc $P \in B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{A}_n$, c'est-à-dire que $P = (x, x/n - 1)$ pour quelque $x \in [0,n]$, $n \in \mathbb{N}$. Soit $r>0$ et considérons $Q(t) = P + (0,-t)$. Donc, $Q(t) \in B(P,r)$ pour tout $t \in]-r,r[$, et en plus $Q(t) \notin D$ si $t>0$ est suffisamment petit. En fait, $Q(t) \notin A_n$ pour tout n et $t>0$ parce que

$$\begin{aligned}\|Q(t)-(n,0)\|_2^2 &= (x-n)^2 + \left(\frac{x}{n} - 1 - t\right)^2 \\ &= (x-n)^2 + \left(\frac{x}{n}-1\right)^2 + t^2 - 2t\underbrace{\left(\frac{x}{n}-1\right)}_{\leq 0} > \|P-(n,0)\|_2^2 > \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

D'autre part, $Q(t) \notin B$ pour t suffisamment petit, vu que

$$Q(t) = \left(x, \frac{x}{n} - 1 - t\right) \in B \iff \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \frac{x}{n} - 1 - t = \frac{x}{m} - 1 - t \iff t = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Donc, si $0 < t < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ on a $Q(t) \notin B$. Ceci montre (1) et complete la premiere partie de l'exercice.

On passe maintenant à démontrer que

$$\overline{D} = D \cup \{(x,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}. \tag{3}$$

À cet effet on commence par observer que A_n est fermé, et donc $\bar{A}_n = A_n$. Pour le montrer on peut, par example, utiliser la caractérisation séquentielle: si $(P_k)_k \subset A_n$ est convergente à Q, on a forcement

$$\|Q\|_2 \leq \|P_k\|_2 + \|P_k - Q\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}} + \|P_k - Q\|_2 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

et donc, pour $k \to +\infty$, on a $\|Q\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ qui implique $Q \in A_n$ et donc A_n fermé.

On prouve maintenant que A est fermé. Remarquons que ça n'est pas une consequence des propriétés des parties fermées, vu que A est union dénombrable (et non fini) de fermés. Encore une fois, on utilise la caractérisation séquentielle. Soit $(P_k)_k \subset A$ une suite convergente à $Q \in A$. On a (à priori) deux possibilités.

Cas 1. La suite $(P_k)_k$ est bornée (c.-à-d. il existe $C > 0$ tel que $\|P_k\|_2 \leq C$). Dans ce cas, il existe[2] N tel que

$$A \cap B((0,0), C) \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N.$$

En particulier, vu que $A_1 \cup \ldots \cup A_N$ est union finie de fermés il est fermé, et vu que la suite $(P_k)_k$ y est contenue, on a forcement que $Q \in A_1 \cup \ldots \cup A_N \subset A$.

Cas 2. La suite $(P_k)_k$ n'est pas bornée. On montre que ce cas est impossible. En effet, ça implique que

$$\|Q\|_2 \geq \|P_k\|_2 - \|P_k - Q\|_2 \longrightarrow +\infty, \quad \text{pour } k \to +\infty,$$

ce qui est impossible.

Donc, A est fermé.

Pour terminer, on prouve que $\bar{B} = B \cup \{(x,-1) \mid \geq 0\}$, ce qui donnera $\bar{D} = A \cup \bar{B}$ et donc (3). On commence par montrer que B_n est fermé. En effet, si $(P_k)_k \subset B_n$ convergente à $Q = (x,y)$, on a qu'ils existent x_k tels que $P_k = (x_k, x_k/n - 1)$, et donc

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|P_k - Q\|_2^2 = \lim_{k\to\infty} |x_k - x|^2 + \lim_{k\to\infty} |x_k/n - 1 - y|^2 \implies x_k \to x \text{ et } y = x/n - 1.$$

Donc, $Q \in B_n$.

On observe maintenant que $B \cup \{(x,-1) \mid x \geq 0\} \subset \bar{B}$. C'est clair que $B \subset \bar{B}$. En plus, pour chaque $(x,-1)$, $x \geq 0$, on a que $P_n := (x, x/n - 1) \in B_n$ et clairement $P_n \to (x,-1)$, ce qui prouve l'assertion.

Finalement, pour prouver que $B = B \cup \{(x,-1) \mid \geq 0\}$, il suffit de montrer que $B \cup \{(x,-1) \mid x \geq 0\}$ est fermé. En effet, vu qu'on vient de montrer que $B \subset B \cup \{(x,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, on obtiendra

$$\bar{B} = \bigcap_{\substack{F \supset B \\ F \text{ fermé}}} F \subset B \cup \{(x,-1) \mid x \geq 0\}.$$

Soit $(P_n)_n \subset B \cup \{(x,-1) \mid x \geq 0\}$ tel que $P_n \to P \in \mathbb{R}^2$. On a deux cas. *Cas 1.* Il existent $k \in \mathbb{N}$ et $N > 0$ tels que $P_n \in B_k$ pour tout $n \geq N$. En ce cas, la suite $(P_n)_{n \geq N} \subset B_k$ est toujours convergente à la même limite P. Le fait que B_k est fermé implique alors que $P \in B_k \subset B$. *Cas 2.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $N > 0$ il existe $n_k \geq N$ tels que $P_{n_k} \in B_k$. Ça nous permet de extraire une suite $(P_{n_k})_k$ tel que $P_{n_k} \in B_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on a $P_{n_k} = (x_k, x_k/k - 1)$ pour un certain $x_k \geq 0$. Étant

[2] Il suffit d'observer que $n \mapsto \min_{P \in A_n} \|P\|_2$ est une fonction croissante de n

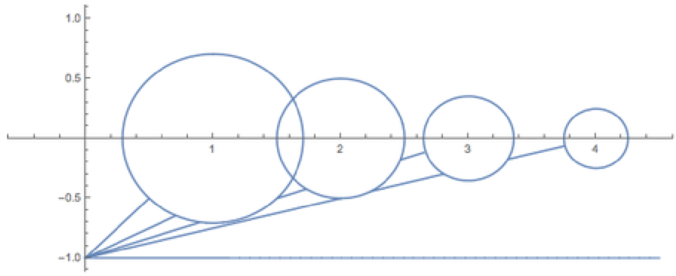


Figure 3: Frontiere de l'ensemble D

une suite extraite de $(P_n)_n$, on a toujours $P_{n_k} \to P$, et donc, si $P = (x, y)$ que $x_k \to x$ et $x_k/k - 1 \to x$. Ça implique immédiatement que $x \geq 0$ et donc que

$$y = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{k} - 1 = x \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} - 1 = -1.$$

Ça implique que $P \in \{(x, -1) \mid x \geq 0\}$.

Donc, en tout cas $P \in B \cup \{(x, -1) \mid x \geq 0\}$, ce qui montre que $B \cup \{(x, -1) \mid x \geq 0\}$ est fermé et donc (3).

Depuis (1) et (3), on a (voir Figure 3)

$$\mathrm{Fr}(D) = \bar{D} \setminus \mathring{D} = B \cup \{(x, -1) \mid x \geq 0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \mathring{A}_n \right).$$

Finalement, l'ensemble D n'a pas de points isolés, vu que ni A_n ni B_n en ont[3] $\square$

Exercice 2. *On considère* $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. *Étant donné* $I \subset [0, 1]$ *non vide, montrer que* $Fr(X) = X$ *où*

$$X = \{f \in C([0, 1]) \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I\}.$$

Exercice 3. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un evn.*

1. *L'intersection de parties denses de* E *est-elle dense ?*
2. *Montrer que l'intersection de deux ouverts et dense est dense.*
3. *($\star$) Que dire de l'intersection quelconque d'ouverts denses ?*

Solution. Partie 1. La réponse est non. En fait, il suffit de considerer $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans l'evn $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Ce deux sont des parties denses, mais carrément leur intersection $A \cap B = \varnothing$ n'est pas dense.

Partie 2. On veut montrer que si $A, B \subset E$ sont deux parties ouvertes et denses, de même est vrai pour leur intersections $A \cap B$. On presentera deux preuves de ce fait: l'une (plus simple) qui utilise la caractérisation topologique de densité, et l'autre qui utilise la caractérisation séquentielle.

[3] C'est claire que, si $P \in D$ est un point isolé, forcement il est isolé pour tout A_n ou B_n tels que $P \in A_n$ ou $P \in B_n$.

1. On montre que pour tout ouvert $G \subset E$ on a $(A \cap B) \cap G \neq \varnothing$. Fixons G ouvert. Vu que A est dense $A \cap G \neq \varnothing$. De plus, $A \cap G$ est ouvert car A est ouvert, et donc, vu que B est dense, $(A \cap G) \cap B = (A \cap B) \cap G \neq \varnothing$.

2. On montre que pour tout $x \in E$ il existe une suite $(x_n)_n \subset A \cap B$ tel que $x_n \to x$. Fixons $x \in E$. Par densité de A, il existe une suite $(y_n)_n \subset A$ tel que $y_n \to x$. De plus, par densité de B, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(\xi_k^{(n)})_k \subset B$ tel que $\xi_k^{(n)} \xrightarrow{k\to\infty} y_n$. En particulier, vu que A est ouvert et $y_n \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\xi_n \in B(y_n, r) \subset A$ pour k suffisamment grand. Vu que cette propriété reste vraie pour tout le rayon plus petit que r, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on trouve N_n tel que pour tout $k \geq N_n$ on a $\xi_k^{(n)} \in A$ et $\|\xi_k^{(n)} - y_n\| \leq \frac{1}{n}$. On définit donc

$$x_1 := \xi_{N_1}^{(1)}, \quad x_2 := \xi_{N_2}^{(2)}, \quad \ldots \quad x_n := \xi_{N_n}^{(n)}, \quad \ldots$$

Par construction, $x_n \in A \cap B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre maintenant que $x_n \to x$. Á cet effet, on calcule

$$\|x_n - x\| = \left\|\xi_{N_n}^{(n)} - x\right\| \leq \left\|\xi_{N_n}^{(n)} - y_n\right\| + \|y_n - x\| \leq \frac{1}{n} + \|y_n - x\|$$

Carrément, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M_1 > 0$ tel que $\|y_n - x\| \leq \varepsilon/2$ si $n \geq M_1$ (parce que $y_n \to x$) et, de plus, il existe $M_2 > 0$ tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon/2$ si $n \geq M_2$. Ça montre que, si $n \geq \max\{M_1, M_2\}$ on a

$$\|x_n - x\| \leq \varepsilon,$$

où, d'une façon équivalente, que $x_n \to x$.

$\square$

A. Code Mathematica pour dessiner les ensembles

A.1. Ensemble A

```
M1 = 4;
TA = Table[(x - n)^2 + y^2 <= 1/2^ n, {n, 1, M1}];
A = RegionPlot[TA, {x, -.5, M1 + .5}, {y, -1, 1},
  AspectRatio -> 2/(M1 + 1),
  PlotLegends -> Table["A_" <> ToString[k], {k, 1, M1}]]
```

A.2. Ensemble B

```
M2 = 4;
TB = Table[
    Plot[x/n - 1, {x, 0, n}, PlotLegends -> {"B_" <> ToString[n]},
     PlotStyle -> ColorData[97, "ColorList"][[M1 + n]]
     ], {n, 1, M2}];
B = Show[TB, PlotRange -> {{-.5, M2 + .5}, {-1, 1}}]
```

A.3. Ensemble D

```
P1noleg =
  RegionPlot[TA, {x, -.5, M1 + .5}, {y, -1, 1},
   AspectRatio -> 2/(M1 + 1),
   PlotStyle -> ColorData[97, "ColorList"][[1]],
   BoundaryStyle -> None];
TBnoleg = Table[Plot[x/n - 1, {x, 0, n}], {n, 1, M2}];
P2noleg = Show[TBnoleg, PlotRange -> {{-.5, M2 + .5}, {-1, 1}}];
DD = Show[P1noleg, P2noleg]
```

A.4. Frontiere de D

```
P1FR = RegionPlot[TA, {x, -.5, M1 + .5}, {y, -1, 1},
   AspectRatio -> 2/(M1 + 1),
   PlotStyle -> White,
   BoundaryStyle -> ColorData[97, "ColorList"][[1]]];
P2FR = Show[TBnoleg,
   ParametricPlot[{x, -1}, {x, 0, M2 + .5}, {y, -1, 1}],
   PlotRange -> {{-.5, M2 + .5}, {-1, 1}}]
DDFR = Show[P2FR, P1FR, AspectRatio -> 2/(M1 + 1)]
```