Corrigée feuille d'exercises 1 (20 septembre)

Exercice 1. *Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que tout boule ouverte est ouverte et que tout boule fermée est fermée.*

Solution. Soient $x \in E$ et $r > 0$. On commence par montrer que la boule ouverte,

$$B(x, r) \coloneqq \{y \in E \mid d(x, y) < r\},$$

est une partie ouverte de E. C'est-à-dire, on montre que

$$\forall y \in B(x, r) \quad \exists s > 0 \text{ tel que } B(y, s) \subset B(x, r). \tag{1}$$

Faire un dessin montre que la bonne choix est $s \coloneqq r - d(y, x)$. En effet, si $z \in B(y, s)$ l'inégalité triangulaire implique

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r \implies z \in B(x, r),$$

ce qui prouve (1).

D'une façon analogue, nous pouvons preuver que la boule fermée,

$$\bar{B}(x, r) \coloneqq \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\},$$

est fermée. À cet effet, nous devons prouver que son complémentaire est ouvert, c'est-à-dire que

$$\forall y \text{ tel que } d(x, y) > r \quad \exists s > 0 \text{ tel que } B(y, s) \cap \bar{B}(x, r) = \varnothing.$$

Encore une fois, un dessin montrera que la bonne choix est $s \coloneqq d(y, x) - r$, car pour tout $z \in B(y, s)$ nous avons

$$d(z, x) \geq d(y, x) - d(z, y) \geq d(y, x) - s = r \implies z \notin B(x, r).$$

□

Exercice 2. *Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux evn. On munit $E_1 \times E_2$ de la norme $\|(x_1, x_2)\| \coloneqq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$ si $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.*

1. *Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme.*
2. *Soient $A \subset E_1 \times E_2$ ouvert et $(x_1, x_2) \in A$. Montrer qu'il existent $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$ ouverts tels que $A_1 \times A_2 \subset A$.*

3. Soient $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$ ouverts. Montrer que $A_1 \times A_2$ est un ouvert de $E_1 \times E_2$.

Solution. On rappel que les operations de somme et produit par un scalaire sur $E_1 \times E_2$ sont définies, pour $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Partie 1. On peut facilement verifier que $\|\cdot\|$ satisfait les trois axiomes des normes, en utilisant le fait que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes.

1. Vu que $\|x_1\|_1 \geq 0$ et $\|x_2\|_2 \geq 0$ on a immédiatement que $\|(x_1, x_2)\| \geq 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. De plus,

$$\begin{aligned} &\|(x_1, x_2)\| = 0 \iff \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 = 0 \iff \\ &\qquad \|x_1\|_1 = 0 \text{ et } \|x_2\|_2 = 0 \iff x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \iff (x_1, x_2) = 0. \end{aligned}$$

2. Pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a facilement que

$$\begin{aligned} \|\lambda(x_1, x_2)\| &= \|(\lambda x_1, \lambda x_2)\| = \|\lambda x_1\|_1 + \|\lambda x_2\|_2 \\ &= |\lambda| \left(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2\right) = |\lambda| \|(x_1, x_2)\|. \end{aligned}$$

3. Pour l'inégalité triangulaire on a, pour tout $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$,

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| = \|x_1 + y_1\|_1 + \|x_2 + y_2\|_2 \\ &\leq \|x_1\|_1 + \|y_1\|_1 + \|x_2\|_2 + \|y_2\|_2 = \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\|. \end{aligned}$$

Donc, $\|\cdot\|$ est une norme.

Partie 2. Étant donné $(x_1, x_2) \in A$, où A est ouvert dans $(E_1 \times E_2, \|\cdot\|)$, par definition de partie ouverte, il existe $r > 0$ tel que $B((x_1, x_2), r) \subset A$. Ici, $B((x_1, x_2), r)$ est la boule ouverte de $(E_1 \times E_2, \|\cdot\|)$.

Pour $r_1, r_2 > 0$, soient $B_1(x_1, r_1) \subset E_1$ et $B_2(x_2, r_2) \subset E_2$ les boules ouvertes dans les evns $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$, respectivement. En particulier, $B_1(x_1, r_1)$ et $B_2(x_2, r_2)$ sont des ouverts. Pour prouver cette partie de l'exercise est donc suffisant de montre que

$$\exists r_1, r_2 > 0 \text{ tels que } B_1(x_1, r_1) \times B_2(x_2, r_2) \subset B((x_1, x_2), r) \subset A,$$

et de choisir $A_1 = B_1(x_1, r_1)$ et $A_2 = B_2(x_2, r_2)$. Encore une fois, un dessin montre qu'un choix raisonnable est $r_1 = r_2 := r/2$. En effet, si $y_1 \in B_1(x_1, r/2)$ et $y_2 \in B_2(x_2, r/2)$ on a

$$\begin{aligned} \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\| = \|y_1 - x_1\|_1 + \|y_2 - x_2\|_2 < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \\ \implies (y_1, y_2) \in B((x_1, x_2), r). \end{aligned}$$

Partie 3. Pour montrer que $A_1 \times A_2$ est une partie ouverte de $E_1 \times E_2$ il faut montrer que

$$\forall x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \quad \exists r > 0 \text{ tel que } B((x_1, x_2), r) \subset A_1 \times A_2. \tag{2}$$

On fixe maintenant $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$. Le fait que A_1 et A_2 soient ouverts implique qui existent $r_1, r_2 > 0$ tels que $B_1(x_1, r_1) \subset A_1$ et $B_2(x_2, r_2) \subset A_2$. Donc, pour completer la preuve de (2) il suffit de montrer que

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B((x_1, x_2), r) \subset B_1(x_1, r_1) \times B_2(x_2, r_2).$$

Un dessin nous permet de faire le choix $r := \min\{r_1, r_2\}$. En effet, si $(y_1, y_2) \in B((x_1, x_2), r)$ on a

$$\|y_1 - x_1\|_1 = \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\| - \|y_2 - x_2\|_2 \leq \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\| < r \leq r_1.$$

Donc $y_1 \in B_1(x_1, r_1)$. Un calcul analogue montre que $y_2 \in B_2(x_2, r_2)$, terminant la prevue. $\square$

Exercice 3. *Montrer que sur $\mathbb{R}^n$ on a*

$$\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_p, \quad \forall p \in [1, \infty).$$

Dessiner les boules détérminées par ces normes.

Solution. Partie 1. Par definition d'equivalence, on doit trouver $c = c(n, p) > 0$ tel que

$$c\|x\|_p \leq \|x\|_\infty \leq \frac{1}{c}\|x\|_p \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

On commence par montrer le fait général suivant: Si $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction strictement croissante, et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\phi\left(\max_{i=1,\ldots,n} a_i\right) = \max_{i=1,\ldots,n} \phi(a_i). \tag{4}$$

En effet, la croissance de ϕ peut être exprimée de la façon suivante

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ on a } a \geq b \iff \phi(a) \geq \phi(b).$$

Donc,

$$\begin{aligned} a := \max_{i=1,\ldots,n} a_i \iff a \geq a_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ \iff \phi(a) \geq \phi(a_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n \iff \phi(a) = \max_{i=1,\ldots,n} \phi(a_i), \end{aligned}$$

ce qui prouve (4).

Vu que la fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ defini par $\phi(a) := a^{1/p}$ est bien croissante[1], par (4) on a

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = \max_{i=1,\ldots,n} (|x_i|^p)^{1/p} = \left(\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} =: \|x\|_p.$$

[1]On peut le verifier en calculant sa derivée: $\phi'(a) = a^{\frac{1}{p}-1}/p \geq 0$, $\forall a \geq 0$.

et donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. D'ailleurs, encore par (4),

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(n \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$
$$= n^{1/p}\left(\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|^p\right)^{1/p} = n^{1/p} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = n^{1/p}\|x\|_\infty.$$

Donc, $\|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$. Finalmente, en posant $c = \min\{1/n^{1/p}, 1\} = 1/n^{1/p}$ on obtient (3).

Partie 2. Pour dessiner les boules, on peut utiliser plusieurs méthodes. Par example, on peut commencer par observer que les normes $\|\cdot\|_p$ sont symétriques par rapport aux rotations de $\pi/2$, π et $3\pi/2$, définies pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (-x, -y).$$

Donc, il suffit de dessiner le boules pour $x, y \geq 0$ et après pivoter. En plus, on passant en coordonnées polaires $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et en observant que si $x, y \geq 0$ alors $\cos\theta, \sin\theta \geq 0$ on a

$$\|(x, y)\|_p = (x^p + y^p)^{1/p} = \rho\left(\cos^p\theta + \sin^p\theta\right)^{1/p}, \quad \forall x, y \geq 0.$$

Ça montre que, pour θ fixé, la norme $\|(x, y)\|_p$ est croissante en ρ, et donc il suffit de dessiner son profil pour $\|(x, y)\|_p = r$, c'est-à-dire la courbe

$$y = (r^p - x^p)^{1/p}, \quad x \in [0, r].$$

Ça et l'application des rotations, permet d'arriver à la Figure 1, obtenue à travers le code `Mathematica` suivant:

```
f = {(1-x^p)^(1/p), (1+x^p)^(1/p),
        -(1-x^p)^(1/p), -(1+x^p)^(1/p)};
Plot[Table[f,{p,{1,1.5,2,3,10}}],{x,-1,1},
        AspectRatio->1,PlotRange-> {-1,1}]
```

□

Exercice 4. *Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'indéterminée x. C'est-à-dire, $P \in \mathbb{R}[x]$ a la forme $P = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Montrer que les fonctions suivantes sont des normes :*

$$\|P\|_1 \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|, \quad \|P\|_2 \coloneqq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2}, \quad \|P\|_\infty \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Solution. Vu que l'element nulle de $\mathbb{R}[x]$ et $P = 0$, pour lequel $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, c'est claire que les trois normes satisfont la condition

$$\|P\| \geq 0 \text{ et } \|P\| = 0 \iff P = 0.$$

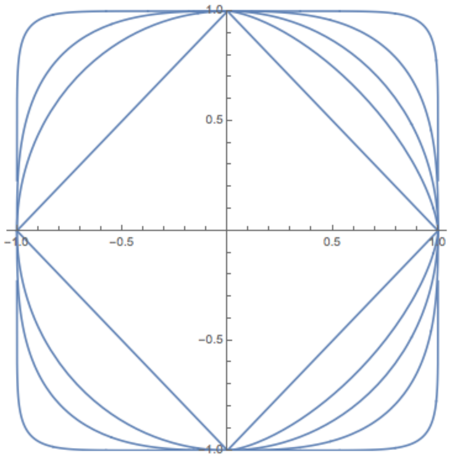

Figure 1: Plot des boules pour $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 1.5, 2, 3, 10$.

Le fait que $\|\lambda P\| = |\lambda|\|P\|$ c'est aussi immédiat dans le trois cas, vu que, si $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ on a par definition $\lambda P = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \ldots + \lambda a_n x^n$.

Il ne reste que à prover l'inégalité triangulaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ de degrés $N \geq M$, c'est-à-dire,

$$P = \sum_{n=0}^{N} p_n x^n \quad \text{et} \quad Q = \sum_{n=0}^{M} q_n x^n.$$

On peut donc associer à P le vecteur $v = (p_0, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et à Q le vecteur $w = (q_0, \ldots, q_M, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Avec cette identification est immédiat constater que

$$\|P\|_p = \|v\|_{p,N}, \quad \|Q\|_p = \|w\|_{p,N}, \quad \|P+Q\|_p = \|v+w\|_{p,N}, \qquad p = 1, 2, \infty.$$

Ici on a denoté par $\|x\|_{p,N} = \left(\sum_{i=1}^{N+1} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $x \in \mathbb{R}^{N+1}$, la p-norme usuelle de $\mathbb{R}^{N+1}$. Vu qu'on sait déjà que $\|\cdot\|_{p,N}$ satisfait l'inégalité triangulaire, on a

$$\|P+Q\|_p = \|v+w\|_{p,N} \leq \|v\|_{p,N} + \|w\|_{p,N} = \|P\|_p + \|Q\|_p, \quad p = 1, 2, \infty,$$

ce qui termine la preuve.

ATTENTION! Ici, pour chaque couple P, Q de polynômes on utilise le fait que le p-normes sont de normes sur $\mathbb{R}^{N+1}$ pour $N = \max\{\deg P, \deg Q\}$. C'est important de se rappeler que cet N change quand on change de couple. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on peut trouver une couple de polynômes qu'on représente comme vecteurs de $\mathbb{R}^{N+1}$. Cet fais jouera un rôle essentiel dans l'exercice prochain. $\square$

Exercice ($\star$) 5. *Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $|\cdot|_\infty$ sur $\mathbb{R}[x]$ definis dans l'exercice 4 ne sont pas équivalentes.*
Suggestion: Considerer les quotients $\|\cdot\|_1/\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_2/\|\cdot\|_\infty$.

Solution. On commence par observer que le fait que deux normes $N_1(\cdot)$ et $N_2(\cdot)$ soient équivalentes est équivalent à:

$$\exists C > 0 \text{ tel que } C \leq \frac{N_1(P)}{N_2(P)} \leq \frac{1}{C} \quad \forall P \in \mathbb{R}[x].$$

Donc, pour montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(P_n)}{N_2(P_n)} = +\infty \quad \text{(ou à 0)}. \tag{5}$$

À cet effet, on considere la suite des polynômes $P_n = x + \ldots + x^n$. Alors,

$$\|P_n\|_1 = n, \qquad \|P_n\|_2 = \sqrt{n}, \qquad \|P_n\|_\infty = 1.$$

Donc, on a,

$$\frac{\|P_n\|_1}{\|P_n\|_2} = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \frac{\|P_n\|_2}{\|P_n\|_\infty} = \sqrt{n},$$

Par (5), on a donc montré que $\|\cdot\|_1$ n'est pas equivalente à $\|\cdot\|_2$, qui n'est pas equivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Le fait que l'être equivalentes est une relation d'equivalence pour les normes, montre que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas pas equivalente à $\|\cdot\|_1$. Alternativement, on peut montrer ce dernier fait de façon direct en calculant

$$\frac{\|P_n\|_1}{\|P_n\|_\infty} = n,$$

et en utilisant encore (5). □

Exercice 6. *Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont ouvert, fermés ou ni l'un, ni l'autre:*

1. *Dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *:*
$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{m + \tfrac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$
2. *Dans* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ *:*
$$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \{(x,y) \mid xy = 1\}, \quad \{(x,y) \mid xy < 1\}.$$
3. *Dans* $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *:*
$$\{f \in C([0,1]) \mid f \textit{ est constante}\}, \quad \{f \in C([0,1]) \mid f(1/2) = 1\}.$$

Solution. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

1. On observe que le complementaire de $\mathbb{Z}$ est
$$\mathbb{Z}^c = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[.$$

   En étant unione dénombrable d'intervals ouverts, $\mathbb{Z}^c$ est ouvert et donc $\mathbb{Z}$ est fermé.

2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est ni fermé ni ouvert. En effet, c'est bien connu que pour chaque interval $I \subset \mathbb{R}$ on a $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ et $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$. Vu que le boules ouvertes de $\mathbb{R}$ sont en particulier des intervals, ceci dis que ni $\mathbb{Q}$ ni son complémentaire $\mathbb{Q}^{\mathrm{c}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont ouverts.

3. L'ensemble X considéré est fermé. En fait, on peut écrire son complémentaire

$$X^{\mathrm{c}} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left([m, m+1] \setminus \left\{ m + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \right) = \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} \left] m + \frac{1}{n}, m + 1 + \frac{1}{n+1} \right[$$

En étant unione dénombrable d'intervals ouverts, X^{c} est ouvert et donc X est fermé.

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$*:*

1. L'ensemble $X = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est fermé. En effet, son complémentaire est

$$X^{\mathrm{c}} = \big\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \big\}.$$

Pour montrer que X^{c} est ouvert, on fixe $(x, y) \in X^{\mathrm{c}}$ et (d'après un dessin) on choisi $r = |y|$. Montrons que $B((x, y), r) \cap X = \varnothing$, ce qui termine la preuve. Soit $(x', y') \in B((x, y), r)$ et fixons n'importe quel point $(\xi, 0) \in X$. Alors,

$$\begin{aligned} \|(x', y') - (\xi, 0)\|_2 &\geq \|(x, y) - (\xi, 0)\|_2 - \|(x, y) - (x', y')\|_2 \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} - \|(x, y) - (x', y')\|_2 \\ &\geq |y| - \|(x, y) - (x', y')\|_2 \\ &> |y| - r \\ &> 0. \end{aligned}$$

2. L'ensemble $X_1 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ est fermé et $X_2 = \{(x, y) \mid xy < 1\}$ est ouvert. On commence par montrer le deuxième fait. Soient $(x, y) \in X_2$, c'est-à-dire $xy = \alpha < 1$, et $r > 0$ qu'on fixera après. Alors, tout $(x', y') \in B((x, y), r)$ satisfait

$$\begin{aligned} x'y' &= \big(x + (x' - x)\big)\big(y + (y' - y)\big) \\ &= \alpha + x(y' - y) + y(x' - x) + (x' - x)(y' - y). \end{aligned}$$

Donc,

$$(x', y') \in X_2 \iff x(y' - y) + y(x' - x) + (x' - x)(y' - y) < 1 - \alpha. \qquad (6)$$

Vu que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ (ou d'une façon equivalente, qu'un cercle est inscrit dans le carré de côté paire à son diamètre), on a $|x' - x| < r$ et $|y' - y| < r$. Donc,

$$x(y' - y) + y(x' - x) + (x' - x)(y' - y) < xr + yr + r^2.$$

Finalement, on observe que $f(r) \coloneqq xr + yr + r^2$ est une fonction continue et que $\lim_{r\to 0} f(r) = 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r > 0$ tel que (6) est satisfait, ce qui prouve que X_2 est ouvert.

Pour prouver que X_1 est fermé, il suffit de considerer $X_1^c = X_2 \cup X_3$, où $X_3 \coloneqq \{(x,y) \mid xy > 1\}$. Les mêmes arguments de tout à l'heure peuvent être adapté sans aucune difficulté à montrer que aussi X_3 est ouvert, ce qui prouve que X_1 est fermé.

Dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$*:*

1. L'ensemble $X = \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ est constante}\}$ est fermée. En fait, $f \in X^c$ si et seulement si ils existent deux points $x_1, x_2 \in [0,1]$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Montrons que, en fixant $r = |f(x_1) - f(x_2)|/2$, aucune $g \in B(f,r)$ peut être constante. Supposons, par l'absurde, que $g \in B(f,r)$ est constante. Alors, $g(x_1) = g(x_2)$ et $\|g - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| < r$. Donc,

$$\begin{aligned} 2r &= |f(x_1) - f(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2) - f(x_2)| \\ &= |f(x_1) - g(x_1)| + |g(x_2) - f(x_2)| \\ &\leq 2\|f - g\|_\infty \\ &< 2r, \end{aligned}$$

ce qui donne l'absurde.

2. L'ensemble $Y = \{f \in C([0,1]) \mid f(1/2) = 0\}$ est fermé. En fait, $f \in Y^c$ si et seulement si $f(1/2) \neq 0$. Alors, aucune $g \in B(f, f(1/2))$ peut être dans Y car

$$|g(1/2)| \geq |f(1/2)| - |f(1/2) - g(1/2)| \geq |f(1/2)| - \|f - g\|_\infty > 0.$$

□

Exercice (⋆) 7. *Considérons l'evn* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*. Montrer que* $A \subset \mathbb{R}$ *est ouvert si et seulement si il est union d'une quantité dénombrable d'intervals disjoints. C'est-à-dire, il existe un ensemble d'indexes* $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ *et des intervals ouverts* $\{I_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *tels que* $I_i \cap I_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$ *et* $A = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} I_i$*.*

Solution. Par definition de partie ouverte, pour chaque $x \in A$ il existe $r_x > 0$ tel que l'interval $]x - r_x, x + r_x[\subset A$. Vu que pour tout $r < r_x$ on a $]x-r, x+r[\subset]x-r, x+r[$, pour tout $x \in A$ il existe un interval $I_x =]a_i, b_i[\subset A$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ on peut toujours supposer $r_x \in \mathbb{Q}$. Evidemment, on a que

$$A = \bigcup_{x\in A} I_x.$$

Toutefois, vu que l'ensemble $\{]a, b[\subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable, il existe un sous-ensemble dénonmbrable $K = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ tel que

$$A = \bigcup_{x \in K} I_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{x_i}.$$

Ça montre que chaque ouvert de $\mathbb{R}$ est union d'une quantité dénombrable d'intervals.

Montrons que les intervals qui donnent A peuvent être choisi disjoints. On subdivise les points de K en classes, en disant que $x, y \in K$ appartiennent à la même classe $\mathcal{K}$ si et seulement si il existe un nombre fini $n \in \mathbb{N}$ de points $z_1, \ldots, z_n \in K$, avec $z_1 = x$ et $z_n = y$, tel que $I_{z_k} \cap I_{z_{k+1}} \neq \varnothing$. Comme K est dénombrable, il est claire qu'il y aura un nombre dénombrable de ces classes. En plus, on observe que, pour une classe $\mathcal{K}$, l'ensemble

$$I_{\mathcal{K}} = \bigcup_{x \in \mathcal{K}} I_x,$$

est un interval, et que pour deux classes différentes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ on a $I_{\mathcal{K}} \cap I_{\mathcal{H}} = \varnothing$ (sinon $\mathcal{K} = \mathcal{H}$). Finalement, la preuve est complétée par le fait que

$$\bigcup_{\mathcal{K} \text{ classe}} I_{\mathcal{K}} = \bigcup_{x \in K} I_x = A.$$

□