Feuille d'exercices du 5 decembre

Exercice 1. On appelle $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour $P \in R[X]$, s'écrivant sous la forme $P = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n X^n$, par : $\|P\|_\infty := \sup_{n=0,\dots,\mathrm{degP}} |a_n|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x0| < 1$.

On appelle T l'application définie par

$$\begin{aligned} T :(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) &\to (\mathbb{R}, |.|) \\ P \quad &\mapsto \quad P(x_0) \end{aligned}$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Montrer que T est continue.
3. Calculer la norme de T.

Exercice 2. Soit E l'espace des fonctions à valeurs complexes, continues sur $[0, 1]$, muni de la norme de la convergence infini.

1. Comment définit on, sur l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{C}$, la norme associée à $\|\cdot\|_\infty$?
2. Montrer que l'application linéaire $\phi : f \in E \mapsto \int_0^1 tf(t)\,dt$, est continue et préciser, si possible, sa norme.
3. On considère maintenant l'application $\phi : f \in E \mapsto \int_0^1 cos(\pi t) f(t) dt$.
   (a) Montrer que elle est continue.
   (b) Soit $\alpha_n \in E$, affine par intervalle, telle que

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha_n(t) = 1 & \text{si } t \in [0, 1/2 - 1/n], \\ \alpha_n \text{ est affine} & \text{sur } [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n], \\ \alpha_n(t) = 0 & \text{si } t \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

   Représenter α_n et $t \mapsto \cos(\pi t)$ sur le même graphique pour $n = 4, 8$. Majorer

$$\left| \int_0^1 |\cos(\pi t)|\, dt - \int_0^1 \alpha_n(t) \cos(\pi t)\, dt \right|$$

   (c) Que vaut la norme de ϕ?

Exercice 3. Soit $\varphi \in C([0, 1])$, et considérons l'application définie par $T(f) := \varphi f$, pour tous $f \in C([0, 1])$.

1. Montrer que $T : (C([0, 1]), \|\cdot\|_2) \to (C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ est continue et calculer sa norme subordonnée.
2. Montrer que $T : (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est continue et calculer sa norme subordonnée.
3. Sous quelle condition il existe $f_0 \in C([0, 1])$ tel que $f_0 = \varphi f_0$? Pourquoi?