Feuille d'exercices du 25 novembre

Exercice obligatoire 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1. Montrer que E est ouvert et fermé. Est-ce que E est connexe ?
2. Soit $\bar{B} = \bar{B}(0,1)$. Montrer que :
   (a) $\bar{B}$ est convexe et fermé;
   (b) $\bar{B}$ est symétrique par rapport à 0;
   (c) on a $E = \bigcup_{\lambda>0} \lambda\bar{B}$, où $\lambda\bar{B} = \{\lambda x \mid x \in \bar{B}\}$;
   (d) $\{0\} = \cap_{\lambda>0}\lambda\bar{B}$.

Exercice 1. Montrer que si une partie de E vérifie les propriétés de la deuxième partie de l'exercice obligatoire, il existe une norme $\|\cdot\|_2$ sur E pour laquelle B est la boule unité fermée. $\|\cdot\|_2$ est-elle équivalente à $\|\cdot\|$?

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn t.q. les boules fermées sont compactes. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue tel que

$$\forall M > 0 \exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \forall x \in E,\ \|x\| > \alpha \implies f(x) \geq M.$$

Montrer que f admet un minimum global sur E.

Exercice 3. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

1. X est connexe.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x, y \in X$, il existe une suite finie de points de X, $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i-1}) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 4. Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Montrer que C et C privé d'un point sont connexes.
2. C peut-il être homéomorphe à un interval de $\mathbb{R}$?
3. C peut-il être homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Est-ce que une intersection de connexes par arcs est connexe par arcs ? Que dire d'une réunion ?

Exercice ($\star$) 6. Considerons $C([0,1])$ avec une norme quelconque $\|\cdot\|$. On note $X = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que X est soit fermé soit dense.
2. Donner un example de norme tel que X soit fermé et un example de norme pour laquelle X est dense et non fermé.