Feuille d'exercises 3 (4 octobre)

Exercice obligatoire. Déterminer si les fonctions suivantes sont continues:

$$\begin{array}{rccc} T_1: & (C([0,1]), \|\cdot\|_1) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} T_2: & (C([0,1]), \|\cdot\|_1) & \to & (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \\ & f & \mapsto & \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right) \end{array}$$

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou ouverts dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne :

$$A := \{(x,y) \mid x^3 + y^2 = 3\}, \quad B := \{(x,y) \mid \arctan(x) = 1\},$$
$$C := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0 \text{ lorsque } f \text{ est continue}\}.$$

Exercice 2. On note $\mathrm{Lip}([0,1])$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lipschitziennes. Montrer que

1. $\mathrm{Lip}([0,1]) \subset C([0,1])$;
2. $\mathrm{Lip}([0,1])$ est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$;
3. Le produit d'une fonction lipschitzienne et d'une fonction lipschitzienne bornée est une fonctions lipschitzienne.

Exercice 3. Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. Pour tout $x \in E$, on définit la *distance de* A comme

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}.$$

Montrer que

1. $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$;
2. l'application $x \mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne et donc continue.

Exercice 4. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,+\infty[$, mais qu'elle est toutefois uniformément continue.

Exercice 5. Soit (E,d) un espace métrique. Si (E,d) est complet et $(\bar{B}_n)_n$ est une suite de boules fermées $\bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ tels que $\bar{B}_{n+1} \subset \bar{B}_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}_n \neq \varnothing.$$

($\star$) Prouver que cette condition est équivalente à la complétude de E.

Exercice 6. Soit d la distance sur $\mathbb{R}$ défini par $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$, où $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Comparer d à la distance euclidienne.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas complet (considérer la suite $x_n = n$).

Exercice 7. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que si $(x_n)_n \subset E$ est une suite de Cauchy, de même est vrai pour $(f(x_n))_n \subset F$.
2. Montrer que de même n'est pas vrai si f est seulement continue. À cet effet, considerer l'application $g : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, où d est la distance de l'exercice 6, défini par $g(x) = x$.

Exercice 8. L'image continue d'un espace métrique complet est-elle un espace métrique complet ?