CORRIGÉ CONTRÔLE DU 25 JANVIER

1. Questions sur le cours

1.1. Montrer que toute partie compacte de E est fermée et bornée. Soit A une partie compacte de E.

(1) **A fermée.** On utilise la caractérisation séquentielle de fermé, c.-à-d., on montre que pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \to x_0 \in E$, on a $x_0 \in A$. En effet, par compacité de A on à qu'il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ tel que $\lim_k x_{n_k} = x_1 \in A$. En plus, comme $(x_{n_k})_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$ et cette dernière converge à x_0, on a $\lim_k x_{n_k} = x_0$. Ainsi, par unicité de la limite, $x_0 = x_1$ et donc $x_0 \in A$.

(2) **A bornée.** Par l'absurde, on suppose que A ne soit pas bornée. Donc, pour toute $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in A$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Comme A compacte, il existe $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ tel que $x_{n_k} \to x_0 \in A$. L'absurde vient du fait que

$$\|x_0\| = \lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k}\| \geq \lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty.$$

1.2. Enoncer et démontrer le théorème de Weierstrass pour les fonctions définies sur les compactes.

Théorèm 1. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $A \subset E$ une partie compacte. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors il existe $x_0 \in A$ tel que*

$$f(x_0) = \sup_{x\in A} f(x).$$

Démonstration. Soit $y_0 = \sup_{x\in A} f(x) = \sup f(A) \in \mathbb{R}$. On utilise la propriété suivante du sup :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y_\varepsilon \in f(A) \text{ tel que } |y_0 - y_\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en choisissant $\varepsilon = 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$, on construit une suite $(y_n)_n \subset f(A)$ tel que $y_n \to y_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit maintenant $x_n \in A$ tel que $f(x_n) = y_n \in f(A)$ (les x_n ne sont pas nécessairement uniques). Par compacité de A, soit $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ tel que $x_{n_k} \to x_0 \in A$. L'énoncé suive par continuité de f, en effet :

$$f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = y_0.$$

Ici, pour justifier la dernière égalité, on a utilisé que toute suite extraite d'un suite convergente ont la même limite. □

2. Exercice 1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $A \subset E$ et $y \in E$. Montrer qu'il existe $x_0 \in A$ tel que

$$\|y - x_0\| = \inf_{x\in A} \|y - x\|,$$

dans les cas suivants.

2.1. A **est un compacte.** Le résultat suive par le théorème de Weierstrass dès qu'on montre que $\phi : x \in E \mapsto \|y - x\| \in \mathbb{R}$ est une application continue. À cet effet, soit $(x_n)_n \subset E$ tel que $x_n \to x_0 \in E$ et montrons que $\phi(x_n) \to \phi(x_0)$:

$$\phi(x_n) \leq \phi(x_0) + \|x_n - x_0\| \to \phi(x_0).$$

Une façon alternative de montrer la continuité de ϕ c'était d'observer qu'elle est composition de deux fonctions continues : la fonction $x \mapsto y - x$ et la fonction norme. Comme ces fonctions sont continue, le même est vrai pour ϕ.

2.2. $\dim E < +\infty$ **et** A **est fermé non vide.** Comme A est fermée non vide, il existe $R > 0$ tel que $\bar{B}(y, R) \cap A \neq \varnothing$, où $\bar{B}(y, R)$ est la boule fermé de centre y. La partie $\bar{B}(y, R) \cap A$ est bornée (comme elle contenue dans une boule) et fermée (comme elle est intersection de deux fermés). Ainsi, en utilisant le fait que $\dim E < +\infty$, elle est compacte. Donc, la question precedente nous montre qu'il existe $x_0 \in \bar{B}(y, R) \cap A$ tel que

$$\|y - x_0\| = \inf_{x \in \bar{B}(y,R) \cap A} \|y - x\|.$$

Pour terminer l'exercice, montrons que

$$\inf_{x \in \bar{B}(y,R) \cap A} \|y - x\| = \inf_{x \in A} \|y - x\|.$$

Observons que pour tout $x \in \bar{B}(y, R) \cap A$ on a $\|y - x\| \leq R$, tandis que si $x \in A \setminus \bar{B}(y, R)$ on a $\|y - x\| > R$. Ainsi, comme $A = (A \cap \bar{B}(y, R)) \cup (A \setminus \bar{B}(y, R))$,

$$\inf_{x \in A} \|y - x\| = \inf \left\{ \underbrace{\inf_{x \in \bar{B}(y,R) \cap A} \|y - x\|,}_{\leq R} \underbrace{\inf_{y \in A \setminus \bar{B}(y,R)} \|y - x\|}_{\geq R} \right\} = \inf_{x \in \bar{B}(y,R) \cap A} \|y - x\|.$$

Ici on a utilisé le fait que si $\inf_{y \in A \setminus \bar{B}(y,R)} \|y - x\| = R$, le minimiseur est en fait un point de $A \cap \bar{B}(y, R)$.

2.3. **Donner un contre example lorsque** A **n'est pas fermé.** Il suffit de considerer, par exemple, $E = \mathbb{R}$, $A =]0, 1[$ et $y \geq 1$. C'est claire que A n'est pas fermé et que

$$\inf_{x \in]0,1[} |x - y| = y - 1 = |y - x_0| \qquad \text{où} \qquad x_0 = 1 \notin A.$$

Plus en générale, sur n'importe quel evn $(E, \|\cdot\|)$ on peut fixer $R > 0$ et considerer $A = B(0, R)$, la boule ouverte centrée à l'origine. Si $\|y\| \geq R$ on a que

$$\inf_{x \in B(0,R)} \|y - x\| = \|y\| - R = \|y - x_0\|, \qquad \text{où} \qquad x_0 = R\frac{y}{\|y\|}$$

Comme $\|x_0\| = R$, on a $x_0 \notin A$.

3. Exercice 2

Exercice : *On considère* $(C([-1/2, 1/2]), \|\cdot\|_\infty)$.

(1) *Montrer que la suite* $(f_n)_n \subset C([-1/2, 1/2])$ *définit par*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k,$$

a une limite dans cette espace.

(2) *En déduire qu'il existe un sous-espace de* $C([-1/2, 1/2])$ *qui n'est pas fermé.*

3.1. **Question 1.** Posons $E = C([-1/2, 1/2])$. Comme $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach, il suffit de montrer que $(f_n)_n \subset E$ est une suite de Cauchy. En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p > n$, et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{p} x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ est une serie convergente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

Ça et le fait que la borne (1) est indépendant de $x \in [-1/2, 1/2]$ preuve que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f_{n+p}\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \forall p > n,$$

c-à-d, que $(f_n)_n$ est de Cauchy.

3.2. **Question 2.** Par un résultat connu des series, on a

$$f_n(x) = x\,\frac{1-x^n}{1-x} \underset{n}{\longrightarrow} \frac{x}{1-x} \qquad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{2}$$

Donc la suite f_n converge simplement vers $f(x) := x/(1-x)$. Vu que la convergence en $\|\cdot\|_\infty$ implique la convergence simple, on a

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f.$$

Considérons la partie $\mathcal{P} \subset E$ constitué des polynômes $P : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$. On sait (ou on peut montrer sans difficulté) que $\mathcal{P}$ est un sev de E. En plus, $(f_n)_n \subset \mathcal{P}$. Toutefois, $f \notin \mathcal{P}$ et donc $\mathcal{P}$ n'est pas fermé par caractérisation séquentielle des fermés (il contient une suite convergente à un point dehors de l'ensemble).

Comme c'est important juste que $f \notin \mathcal{P}$, on peut déduire le résultat sans utiliser la formule explicite (2). Par example, on peut montrer que $\mathcal{B} = \{x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ est une base de $\mathcal{P}$. On voit donc que

$$f \in \overline{\operatorname{vec}\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{P}} \qquad \text{mais} \qquad f \notin \operatorname{vec}\mathcal{B} = \mathcal{P}.$$

Comme $\mathcal{P} \neq \overline{\mathcal{P}}$ on déduit que $\mathcal{P}$ n'est pas fermé.