Contrôle de lundi 7 décembre

Question sur le cours

1. Donner la définition de partie ouverte et de partie fermée d'un evn $(E, \| \cdot \|)$.

2. Enoncer et démontrer les caractérisations séquentielles de tels propriétés.

Exercice 1

1. Considérons $A = \{m + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.

   - Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontiere de A.
   - Si c'est le cas, dire si A est fermés ou ouverts.
   - A est-il compact?

2. Soit $I \subset [0,1]$ non vide. On considère l'ensemble

$$X = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in I\}.$$

   - Prouver que $\partial X = X$ si on considère la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $C([0,1])$.
   - X est-il compact?

Exercice 2 Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi \in C([0,1])$.

1. Montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy + \varphi(x).$$

2. Ce résultat reste-t-il vrai si φ n'est pas continue?

Exercice 3 Nous rappelons que une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est *lipschitzienne* s'il existe $L > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [0,1].$$

Notons avec $\mathrm{Lip}([0,1])$ l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$. Montrer que :

1. $\mathrm{Lip}([0,1])$ est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.

2. La fonction suivante est une norme sur $\mathrm{Lip}([0,1])$:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + L(f), \quad \text{où} \quad L(f) := \sup_{x,y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

3. $$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}([0,1]).$$

4. L'espace $\mathrm{Lip}([0,1])$ muni de la norme $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ est de Banach.