Feuille d'exercices 18 janvier

Exercice "obligatoire"

Soit E un sous-espace de $P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ est C^∞ et périodique de période $2\pi\}$. On suppose que pour toute suite $(f_n)_n \subset E$ t.q. $f_n \to 0$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$, il en est de même de la suite $(f_n')_n$.

1. Montrer qu'existe $C > 0$ t.q.
$$\forall f \in E, \|f_n'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty.$$
2. Montrer que E est de dimension finie et il possède une base constituée de fonctions de la forme $x \mapsto e^{inx}$

Exercice 1

On appelle $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour $PR[X]$, s'écrivant sous la forme $P = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n X^n$, par : $\|P\|_\infty := \sup_{n=0,\cdot,\mathrm{degP}} |a_n|$. Soit $x_0\mathbb{R}$, tel que $|x0| < 1$.

On appelle T l'application définie par

$$\begin{aligned} T :&(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|) \\ &P \quad \mapsto \quad P(x_0) \end{aligned}$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Montrer que T est continue.
3. Calculer la norme subordonnée de T.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normée de dimension finie n. Démontrer que si $f : E \to E$ est une application linéaire dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ donnée de E est $M = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, alors :

$$\|f\|_{L(E,E)} = \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}|.$$

Exercice 3

On considère l'espace E de fonctions continue sur $[0,1]$ à valuers dans $\mathbb{C}$ et l'application

$$T : f \in E \mapsto \int_0^1 t\, f(t)\, dt.$$

1. Étudier la continuité de T pour chacune des trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Déterminer la norme subordonnée dans le trois cas.

Exercice 3

Soit E l'espace des fonctions à valeurs complexes, continues sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme$\|f\|_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. 1. Comment définit on, sur l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{C}$, la norme subordonnée associée à $\|\cdot\|_\infty$?2. Montrer que l'application linéaire $\phi : f \in E \mapsto \int_0^1 tf(t)\, dt$, est continue et préciser, si possible, sa norme subordonnée.3. On considère maintenant l'application $\phi : f \in E \mapsto \int_0^1 cos(\pi t) f(t) dt$. a. Montrer que est continue. b. Soit $\alpha_n \in E$, affine par intervalle, telle que

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha_n(t) = 1 & \text{si } t \in [0, 1/2 - 1/n], \\ \alpha_n \text{ est affine} & \text{sur } [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n], \\ \alpha_n(t) = 0 & \text{si } t \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

Représenter α_n et $t \mapsto \cos(\pi t)$ sur le même graphique pour $n = 4, 8$. Majorer

$$\left| \int_0^1 |\cos(\pi t)|\, dt - \int_0^1 \alpha_n(t) \cos(\pi t)\, dt \right|$$

4. Que vaut la norme (subordonnée) de ϕ?

Exercice 4

Soient $e_n : x \mapsto \sin(nx)$ et $f_n : x \mapsto \cos(nx)$. Démontrer que la famille $\{e_n\}_n \cup \{f_n\}_n$ est une base orthonormée de l'espace $E = C(0, 2\pi)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx.$$