Feuille d'exercices 21 décembre

Exercices obligatoires (à rendre mercredi 6/01/16)

Exercice 1 (2 points) On considère les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x^2 + 2x + 3,\ x \geq -1\right\}$$

$$B_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = nx,\ x > \frac{1}{n}\right\}, \qquad B = \bigcup_{n \geq 1} B_n.$$

Déterminer l'adherence, l'intérieur, la frontière et les points isolés de $C = A \cup B \cup \{(3, 0)\}$. Est C fermé ou ouvert? Est-il compact? Est-il connexe par arcs?

Exercice 2 (2 points)

1. Montrer que le plan privé d'une droite n'est pas connexe par arcs.
2. Que dire d'un ensemble étoilé par rapport à un de ses points ?
3. Montrer que une intersection de connexes par arcs est connexe par arcs. Que dire d'une réunion ?

Exercice 3 (3 points) Soit E l'espace des fonctions de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Verifier qu'on définit une norme sur E en posant
$$\|f\|_{C^2} := \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$
2. Pour chaque $f \in E$, démontrer les inégalités suivantes
$$\|f''\|_\infty \leq \|f\|_{C^2}, \qquad \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^2}, \qquad \|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^2}.$$
Indication: Pour la deuxième et la troisième inégalité on rappellera la formule de Taylor-Lagrange pour l'expression du reste dans le théorème de Taylor.
3. Soit $(f_n)_n \subset E$ une suite de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_{C^2}$. Montrer qu'ils existent $f, g, h \in C([0, 1])$ telles que on a les limites suivantes en $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$:
$$f_n \to f, \qquad f'_n \to g, \qquad f''_n \to h.$$
4. On se propose de montrer que $g = f'$.
   - Pour $h > 0$ on definit
   $$\Delta_h f(x) = \frac{f(x) - f(x + h)}{h}.$$
   Montrer que $\Delta_h f_n$ converge uniformement à $\Delta_h f$ et que, de la meme façon, $\Delta_h f'_n$ converge uniformement à $\Delta_h g$.
   - Soit $x \in [0, 1]$, on écrive
   $$|\Delta_h f(x) - g(x)| \leq |\Delta_h f(x) - \Delta_h f_n(x)| + |\Delta_h f_n(x) - f'_n(x)| + |f'_n(x) - g(x)|.$$
   Justifier que pour tous $\varepsilon > 0$ ils existent donc N et $\delta > 0$ tels que si $n \geq N$ et $h \leq \delta$ on a
   $$|\Delta_h f(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon$$
   - En déduire que $g = f'$.
5. Comme de la meme façon on peut montrer que $g' = h$, en déduire que $(E, \|\cdot\|_{C^2})$ est un espace de Banach.

Exercice 1 On considère $(C([-1/2,1/2]), \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que la suite $(f_n)_n \subset C([-1/2,1/2])$ définit par

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

a une limite dans cette espace. En déduire qu'il existe un sous-espace de $C([-1/2,1/2])$ qui n'est pas fermé.

Exercice 2 Étudier la continuité des applications suivantes selon que $C([0,1])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou de la norme $\|\cdot\|_1$.

$$\delta : f \in C([0,1]) \mapsto f(0) \in \mathbb{R},$$

$$\psi : f \in C([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R},$$

$$(f,g) \in C([0,1]) \mapsto f(0) + g(0) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 On considère l'espace C des suites $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ convergentes, on le munit de la norme $\|u\|_\infty = \sup |u_n|$. Soit L l'application qui à une suite $u \in C$ associe sa limite.

1. Montrer que L est linéaire et continue.
2. Calculer ça norme subordonnée.