Feuille d'exercices 14 décembre

Exercice obligatoire (à rendre vendredi 18/12) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1. Montrer que E est ouvert et fermé.
2. Montrer que B, la boule unité fermée de E,
   - est convexe, fermée.
   - symétrique par rapport à 0.
   - Que $E = \bigcup_{\lambda>0} \lambda B$ (ici on denote $\lambda B = \{\lambda x \mid x \in B\}$).
   - $\{0\} = \bigcap_{\lambda>0} \lambda B$

Exercice 1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|x\| > \alpha \implies f(x) \geq M.$$

Montrer que f admet un minimum global sur E.

Exercice 2 $A \subset \mathbb{R}$ est une partie connexe par arcs si et seulement si A est un interval. (Indication : montrer d'abord que A est un interval si et seulement si A est convexe).

Exercice 2 Montrer que si une partie de E vérifie les propriétés de la deuxième partie de l'exercice 1, il existe une norme $\|\cdot\|_2$ sur E pour laquelle B est la boule unité fermée. $\|\cdot\|_2$ est-elle équivalente à $\|\cdot\|$?

Exercice 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les puissances de A;
2. Déterminer la limite de la suite $(C_n)_n$ où

   $$C_n = \frac{1}{n+1}(\mathrm{Id} + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n).$$

   Ici on à noté Id la matrice identité.

Exercice 4 ($\star$) Considerons $C([0,1])$ avec une norme quelconque $\|\cdot\|$. On note $A = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que A est soit fermé soit dense.
2. Donner un example de norme tel que A soit fermé et un exemple de norme pour laquelle A est dense et non fermée.

Exercice 5 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie, $C \subset A$ et $a \in E$. Montrer qu'il existe $x_0 \in C$ tel que

$$\|a - x_0\| = \inf_{x \in K} \|x - a\|,$$

si A est un compact, si A est fermé non vide et si A est un sev de E. Donner un contre example lorsque A n'est pas fermé.