Feuille d'exercices 15 novembre

Exercice obligatoire Determiner l'adhérence, l'intérieur et la frontiere des partie de $\mathbb{R}$ suivantes:

$$A = \left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2,3] \cup \left\{3 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[n, n + \frac{1}{n}\right]$$

Sont-ils fermés, ouverts où ni l'un ni l'autre?

Exercice 1 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn et A une partie de E. Montrer que $x_0 \in \bar{A}$ si et seulement si une des propriétés suivantes est satisfaite:

- x_0 est un point isolé;
- tous les voisinages de x_0 contiennent une infinité de points de A.

Exercice 2 ($\star$) Montrer que $A \subset \mathbb{R}$ est ouvert si et seulement si il existe un ensemble d'indexes $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ et des intervals ouverts $\{I_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ (c.-à-d. $I_i =]a_i, b_i[$ où $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$) t.q. $I_i \cap I_j = \varnothing$ si $i \neq j$ et $A = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i$.

Exercice 3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn:

1. Une intersection d'espaces denses est-elle dense?
2. Démontrer qu'une intersection de deux ouverts denses est dense.
3. ($\star$) Que dire d'une intersection quelconque d'ouverts denses?

Exercice 4 ($\star$) Soit $(G, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que deux cas sont possibles :

- soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$;
- soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 On se propose de prouver que $(e^{in})_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

1. Montrer que l'ensemble $\{m + 2k\pi \mid m, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. En déduire la densité de $\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathbb{T}$ (on admettra que π est irrationnel, et on utilisera l'exercice 7).